

REVELATION DES PREFERENCES

POUR LES BIENS PUBLICS

1ère Partie

CARACTERISATION DES MECANISMES

SATISFAISANTS

par

Jerry GREEN⁺ et Jean-Jacques LAFFONT⁺⁺

janvier 1976

N° A125 0176

Cette note provisoire a été préparée pour la séance du 19 janvier 1976 du Séminaire d'Econométrie du C.N.R.S., Paris et pour le symposium d'hiver de la Société d'Econométrie, Ottignies, janvier 1976. Nous avons bénéficié dans notre travail de nombreux commentaires et suggestions, en particulier de la part de K. Arrow, G. Fuchs, T. Groves, R. Guesnerie et E. Kohlberg

⁺Harvard University

⁺⁺Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, C.N.R.S.

"Si l'agent économique doit répartir ses ressources entre usages privé et public de façon à maximiser sa satisfaction, il ne va évidemment en rien contribuer aux projets publics"

Wicksell [1896]

Dans un système économique décentralisé, la souscription est certainement le moyen le plus naturel pour déterminer la production des biens publics et leur financement. Connaissant les contributions des autres agents, chaque individu détermine la sienne par la considération de l'accroissement de bien public qu'elle permet d'entreprendre et il ne prend pas en compte les gains d'utilité qui en résultent pour les autres agents. Il est intuitivement clair que cette solution ne correspond pas à une allocation efficace des ressources (voir Malinvaud [1970]). Dans la plupart des cas, en particulier lorsqu'il existe un grand nombre d'agents, le résultat est même désastreux car l'impact de sa propre contribution sur la production de bien public est pour chaque agent négligeable. Il va dès lors compter sur les autres pour financer le bien public en prétendant que ce service ne l'intéresse pas. Cette inaptitude des mécanismes décentralisés à conduire à une allocation efficace a été appelée dans la littérature anglo-saxonne, "the free rider problem", que nous traduirons pour les besoins de cette note par "le problème du passager clandestin".

Puisque les mécanismes décentralisés échouent, il faut trouver des mécanismes de décision qui permettent de résoudre le problème du passager clandestin et aboutissent à une allocation efficace des ressources. L'objectif de cette note est d'étudier une solution possible.

Dans la première section, le problème du passager clandestin est situé dans son contexte historique. Le lecteur intéressé par les résultats nouveaux peut se reporter directement à la section 2 dans laquelle nous donnons une caractérisation complète des mécanismes qui apportent une solution au problème du passager clandestin dans une économie où les agents ont des fonctions d'utilité séparables. La nécessité de l'hypothèse de séparabilité est démontrée dans la section 3. La section 4 traite du problème de l'équilibre du budget de l'Etat et fournit une solution approximative dans une économie à un grand nombre de participants. Enfin, nous décrivons quelques uns des problèmes non résolus que nous aborderons dans une prochaine étude.

I. Le problème de la révélation des préférences dans une perspective historique.

A. De Wicksell à Samuelson

A la fin du XIX^{ème} siècle, un débat sur les finances publiques prit place entre économistes européens. Deux doctrines étaient opposées, "imposition selon le bénéfice" d'une part, et "imposition selon l'aptitude à payer" d'autre part. Durant la plus grande partie du XIX^{ème} siècle, la plupart des auteurs tels J.B. Say et J.S. Mill s'étaient concentrés sur l'approche "aptitude à payer" et considéraient le problème de l'imposition comme plus ou moins indépendant de la détermination des dépenses publiques. A partir de 1880, plusieurs économistes, et en particulier Mazzola, Pantaléoni, de Viti de Marco en Italie, Sax en Autriche commencèrent à utiliser les concepts "modernes" d'utilité marginale et de valeur subjective dans l'étude des services publics et des contributions individuelles à ces services. Ils firent revivre ainsi l'approche "bénéfice" implicite dans les écrits de nombreux auteurs du XVIII^{ème} siècle, tels que Bentham, Locke ou Rousseau [le lecteur intéressé par plus de détails sur cette controverse est renvoyé à Musgrave [1959] et Musgrave et Peacock [1967]].

En 1896, Knut Wicksell publia "Ein neues Prinzip der gerechten Besteuerung", dans un livre qui rassemble trois essais sur les finances publiques [Wicksell [1896]]. Dans sa discussion de la contribution de Mazzola au débat décrit ci-dessus, il mit en évidence le problème du passager clandestin qui avait été ignoré jusque là dans la

reformulation de l'approche "bénéfice". Mazzola avait formulé une loi de l'économie fiscale que Wicksell résuma comme suit:

"La levée d'impôts est juste et s'applique sans arbitraire ni erreur, lorsque chaque contribuable réussit à répartir ses ressources de manière à maximiser son utilité".

Pour Wicksell cette exigence n'a pas de sens [1896, p. 81]

"Si l'agent économique doit répartir ses ressources entre usages privé et public de façon à maximiser sa satisfaction, il ne va évidemment contribuer en rien aux projets publics (tout au moins si on néglige les droits fixes et autres charges analogues). Qu'il contribue peu ou beaucoup affectera si légèrement la production de services publics, qu'à toutes fins pratiques, il ne s'en rendra même pas compte. Bien sûr, si chacun devait agir ainsi, l'Etat cesserait bientôt d'exister".

Wicksell, surpris de la trivialité de sa remarque, la considère toutefois fondamentale. Il en conclut qu'une allocation efficace des ressources ne peut être réalisée par un comportement décentralisé [1896, p. 82].

" L'égalité entre l'utilité marginale des biens publics et leur prix ne peut donc être établie, de façon isolée par chaque agent économique, mais doit être assurée par une consultation entre lui et les autres agents ou leurs représentants. Comment une telle consultation doit-elle être organisée pour réaliser un tel but (d'efficacité)?... Il s'agit justement de répondre à cette question".

Le problème était correctement posé, et ce fut probablement l'apport le plus important de Wicksell à la théorie des finances publiques. Il suggéra aussi une solution, le principe de l'unanimité (approximative) et du consentement volontaire à l'imposition. Chaque

dépense publique doit être votée simultanément avec la détermination de son financement et ne doit être acceptée que si l'unanimité (ou la quasi unanimité) est obtenue. Notons aussi qu'il insista, pour la validité de son principe, sur l'existence d'une distribution initiale des revenus appropriée. Si nous pouvions ignorer les coûts d'information et de communication, ainsi que les menaces et les comportements stratégiques, ce processus conduirait en effet à un optimum de Pareto. Cependant, selon l'ordre des votes, plusieurs états distributifs peuvent être obtenus. En vérité, c'est la raison essentielle qui conduira à un comportement stratégique tout au long de la séquence des votes avec des résultats imprévisibles.

Dans "die Gerechtigkeit der Besteuerung", Lindhal [1919] a présenté ce qui est souvent considéré comme la version finale de la doctrine "taxation selon l'aptitude à payer". De façon plus précise, Lindhal a donné, dans une économie avec biens publics, une caractérisation (d'équilibre partiel) de l'optimum de Pareto pour lequel la contribution de chaque individu au financement d'un bien public donné égale son utilité marginale pour ce bien public multipliée par la quantité de bien public, ou, dans les termes même de Lindhal, pour lequel la part de chaque agent au budget d'un bien public égale son utilité marginale pour le bien public.

Le caractère d'équilibre partiel de l'analyse peut être facilement légitimé si chaque agent a une utilité marginale pour la monnaie constante, comme l'a montré Samuelson [1969]. La seule vraie faiblesse de la présentation de Lindhal est d'ignorer que même en partant d'une

distribution optimale des revenus, son mécanisme peut conduire à une distribution inappropriée, c'est-à-dire, à un optimum de Pareto qui n'est plus le meilleur au sens d'une fonction d'utilité collective donnée. Seule l'approche d'équilibre général de Samuelson [1954][1955] permet de comprendre que dans une économie avec biens publics, il existe une infinité d'optima de Pareto. Etant donné des ressources initiales, à chaque optimum de Pareto peuvent être associés des pseudo-prix et des transferts forfaitaires tels que l'optimum de Pareto puisse être réalisé comme un équilibre concurrentiel avec ces pseudo-prix et ces transferts, appelé pseudo-équilibre. Le caractère 'pseudo' de l'équilibre est dû au fait que les prix des biens publics sont personnalisés et ne peuvent donc apparaître sur un marché. Dans ce cadre, il est approprié d'appeler équilibre de Lindhal le pseudo équilibre pour lequel les transferts forfaitaires sont nuls. C'est l'état de l'économie qui serait éventuellement atteint si, partant de ressources initiales données, les marchés artificiels requis par les prix personnalisés pouvaient être organisés de façon concurrentielle.

Pour en revenir à la contribution de Lindhal, nous pouvons dire que la caractérisation de l'optimalité de Pareto dans une économie avec biens publics fait de grands progrès grâce à son article, mais que la critique fondamentale de Wicksell, au sujet du problème du passager clandestin est perdue de vue, puisque toute la discussion suppose des préférences connues. En résumé, on connaît mieux l'objectif, mais on sait encore moins bien comment y parvenir.

Dans son article de 1939, dans lequel il présente au public

américain le débat résumé ci-dessus, Musgrave met l'accent sur la difficulté du problème du passager clandestin. Samuelson est aussi très clair dans la version "mathématique" de sa "théorie pure des dépenses publiques" sur l'impossibilité de décentraliser un pseudo-équilibre. Cependant, personne n'essaie d'attaquer le problème.

B. Tentatives pour résoudre le problème du passager clandestin

H.R. Bowen [1943] a sans doute été le premier économiste à apporter une contribution importante sur le problème du passager clandestin posé par Wicksell. De plus, son article contient une redécouverte des résultats de Lindhal et un exemple montrant que le vote à la majorité peut conduire à un état Pareto optimal, première étape vers le futur résultat de Black [1948] selon lequel le vote à la majorité est une procédure de choix sociaux transitive pour des préférences "à un seul pic".

Bowen établit d'abord les conditions d'optimalité paretienne et rejette le marché pour les atteindre. Il propose à la place un mécanisme de vote, pour lequel il comprend la moitié du problème du passager clandestin. Il réalise qu'il est impossible d'espérer que les agents révèlent leurs préférences par leurs votes, si leurs contributions sont liées à leurs votes. C'est pourquoi il suppose une imputation a priori des coûts (parts égales si la distribution des revenus est "juste"), pour amener les agents à voter selon leurs vraies préférences. Pour lui, la dernière difficulté est de trouver une procédure d'agrégation des préférences, d'où sa contribution sur le vote à la majorité. Malheureusement, il n'a pas vu la deuxième partie du problème du passager clandestin.

L'agent peut réaliser l'influence de son vote sur le mécanisme de décision (et non plus sur sa contribution), et modifier son vote de façon à obtenir la décision qu'il préfère. Supposons qu'un projet public soit réalisé si la somme des évaluations individuelles annoncées excède le coût, coût qui par exemple est réparti également entre les agents. Un agent pour lequel l'utilité du projet est supérieure au coût par tête répondra la plus grande évaluation possible pour essayer de faire accepter le projet. Symétriquement, un agent pour lequel l'utilité du projet est inférieure au coût par tête répondra la plus petite évaluation possible pour essayer de faire rejeter le projet.

Plus récemment, E. Thompson [1967] a imaginé un système d'assurances qui réalise une allocation efficace si l'Etat connaît les probabilités (supposées fixes) attachées par les agents au succès ou échec du vote d'un projet public donné. Il est possible d'éliminer cette très forte hypothèse informationnelle par un procédé de révélation des probabilités proposé par Kurz [1974] à la suite de Savage [1971]. Cependant, si les agents font le lien entre les deux étapes de la procédure de Kurz, d'abord révélation des probabilités, ensuite révélation des disponibilités à payer par maximisation d'une fonction objectif appropriée, ils peuvent modifier avec succès leurs réponses. Newberry [1974] a proposé un mécanisme de paiement aléatoire qui intègre les deux étapes de la procédure de Kurz. Cependant, il reste que la révélation des vraies préférences requiert l'hypothèse selon laquelle l'agent croit qu'il ne peut influencer le résultat du processus de décision collective, c'est-à-dire essentiellement l'hypothèse de Bowen. La première partie du problème du passager clandestin reçoit donc une solution possible,

mais la deuxième partie subsiste.

Dans le cadre de ce tour d'horizon des tentatives de solutions il faut dire un mot de la suggestion de Tiebout [1956] dans le cas des biens publics locaux. Tiebout a fait observer qu'il existe dans le cas des biens publics locaux une dimension supplémentaire qui permet, idéalement, de résoudre le problème de la révélation des préférences. Les agents ont en effet une variable de choix supplémentaire, la localité dans laquelle ils décident d'habiter. D'après Tiebout, le comportement des gestionnaires locaux combiné à la mobilité des agents conduit à des communautés dans lesquelles les agents sont identiques. Par symétrie, le problème est ainsi résolu. Les difficultés soulevées par cette proposition sont nombreuses et nous renvoyons le lecteur intéressé à la littérature abondante sur les biens publics locaux (voir en particulier Stiglitz [1974]).

Notons enfin les contributions de Drèze et de la Vallée Poussin [1971] et Malinvaud [1972] qui ont construit une procédure de planification avec biens publics pour laquelle la révélation des préférences est une stratégie minimax. De plus, à l'équilibre du mécanisme la révélation des préférences est un équilibre de Nash. Cependant, ce dernier résultat semble lié à la formalisation en temps continu de la procédure .

C. Théorèmes d'impossibilité.

A côté de ces tentatives pour résoudre le problème, il existe depuis très récemment des théorèmes négatifs très généraux qui suggèrent

l'impossibilité de trouver des mécanismes non manipulables permettant de réaliser une allocation efficace.

Ainsi, Hurwicz [1972] a montré que, dans une économie d'échanges avec biens privés, il est impossible de trouver un mécanisme d'allocation des ressources qui soit à la fois Pareto optimal et dans lequel les agents, à l'équilibre du mécanisme, aient intérêt à agir selon leurs vraies préférences. Ledyard et Roberts [1974] ont étendu ce résultat au cas d'une économie avec biens publics.

Dans le même esprit, mais dans le cadre plus général de la théorie des choix sociaux, Gibbard [1973] et Satterthwaite [1975] ont démontré qu'il n'existe pas de mécanisme de choix social pour lequel la stratégie optimale d'un agent est une stratégie dominante et qui soit à la fois Pareto optimal, non dictatorial et non manipulable. Ce théorème très important permet de situer la difficulté du problème et les voies de recherche possibles. Comme dans la théorie traditionnelle des choix sociaux (Arrow [1951]), les exigences de Gibbard et Satterthwaite sont très fortes. En particulier, ils permettent un comportement stratégique avec des préférences individuelles arbitraires. Il apparaît donc qu'un espoir de solution peut venir d'une limitation du champ des préférences possibles, et par suite, des possibilités de manipulation des agents.

De fait, dans un contexte spécialisé où les décisions concernent seulement le niveau de production des biens publics et des transferts monétaires entre agents, Groves [1973] et Groves et Loeb [1975] ont supposé que les préférences étaient monotones dans le revenu et que

les disponibilités à payer pour les biens publics étaient indépendantes du revenu. Dans un tel environnement, ils ont trouvé une classe de mécanismes tels que la révélation des vraies préférences est une stratégie dominante pour chaque agent et qu'un optimum de Pareto est sélectionné.

Dans la section suivante, nous montrons que les mécanismes proposés par Groves et Loeb sont les seuls à avoir de telles caractéristiques. De plus, nous montrons de façon plus générale que les mécanismes à stratégies dominantes bien définis qui sélectionnent des optima de Pareto (appelés mécanismes satisfaisants), indépendamment de la question de révélation des vraies préférences, sont essentiellement isomorphes aux mécanismes proposés par Groves.

II. Caractérisation des mécanismes satisfaisants

A. Définitions

a) Projets Publics

Nous nous intéressons à la réalisation d'une enveloppe de projets publics dans une économie où il existe un seul bien privé (que l'on pourra identifier à de la monnaie) et N agents économiques. La seule restriction imposée aux projets publics dans notre analyse, est la compacité dans un certain espace topologique de l'ensemble κ des enveloppes de projets publics disponibles. Parmi les nombreux exemples couverts par notre approche très générale, citons:

- i) un projet public unique de taille fixe; dans ce cas, $\kappa = \{0,1\}$, où 1 représente la réalisation du projet et 0 la non réalisation;
- ii) un projet public unique de taille variable; la taille possible doit appartenir à un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$, par exemple, $\kappa = [0, \bar{K}]$, ou $\kappa = \{0, [K_1, K_2]\}$ si la technologie requiert une taille minimale, ou $\kappa = \{0, K_1, \dots, K_L\}$, s'il existe des indivisibilités,
- iii) un ensemble de L projets publics de tailles variables; dans ce cas, on peut avoir par exemple $\kappa = \prod_{\ell=1}^L [0, K_\ell]$,
- iv) un ensemble compact de fonctions, telles que des lois fiscales; dans ce cas, par exemple, $\kappa = \mathcal{C} [0,1]$, ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$, etc...

On note K un élément courant de κ .

b) Transferts, fonctions d'utilité et fonctions d'évaluation

Nous considérons des transferts monétaires t_i , $i = 1, \dots, N$ qui seront déterminés de façon simultanée avec les biens publics. Etant donné une situation initiale arbitraire, le gain d'utilité de l'agent i dû au programme de projets publics et de transferts $(K \in \kappa, t_i, i = 1 \dots N)$ est:

$$u_i(K, t_i) \text{ défini sur } \kappa \times \mathbb{R}$$

Définition 1: La fonction d'utilité u_i (...) est dite séparable si et seulement si:

$$u_i(K, t_i) = v_i(K) + t_i$$

La fonction v_i (.), qui est nette des coûts des projets imputés à l'agent i et définis ex-ante, est appelée la fonction d'évaluation de l'agent i . L'hypothèse de séparabilité correspond à une absence d'effet revenu dans l'évaluation des biens publics.

L'ensemble des résultats positifs de cette note est valable uniquement pour des fonctions d'utilité séparables, et les définitions données ci-après s'appliquent à ce cas. Dans la section suivante, nous montrerons que les résultats ne peuvent pas se généraliser aux fonctions d'utilité non séparables.

c) Mécanismes

Pour apporter une solution au problème du passager clandestin nous allons soumettre les N agents économiques à un jeu qui est joué selon les règles (ou mécanisme) suivantes:

Soit S_i , l'espace des stratégies de l'agent i , et soit $S = \prod_{i=1}^N S_i$. Un "coup" du jeu est un élément $s = (s_1, \dots, s_N) \in S$.

L'issue du jeu est définie par deux fonctions:

- 1) Pour chaque coup, une fonction de décision $d(\cdot)$ de S dans κ spécifie la décision quant au choix du projet public.
- 2) Pour chaque coup, une règle de transferts, $t(\cdot) = [t_1(\cdot), \dots, t_N(\cdot)]$ de S dans R^N spécifie un programme de transferts.

Soit $f(\cdot) = [d(\cdot), t(\cdot)]$

Le jeu peut être joué avec différents niveaux d'information au sujet des actions des autres joueurs. Si les actions des autres joueurs sont connues, l'issue du jeu peut être un équilibre de Nash. Si elles sont inconnues, les agents peuvent jouer une stratégie minimax ou maximiser l'espérance mathématique de leur utilité avec des distributions de probabilités subjectives données sur les actions des autres. Pour tous les jeux considérés dans cette note, la stratégie optimale est une stratégie dominante (c'est-à-dire, est optimale pour toute action des autres joueurs) de sorte que toutes ces façons de jouer sont équivalentes.

Nous introduisons maintenant plusieurs ensembles de règles du jeu:

Définition 2: Un mécanisme $M, (S, f)$, est un ensemble d'espaces de stratégies $S_i, i = 1, \dots, N$, et une fonction $f(.) = [d(.), t_1(.), \dots, t_N(.)]$ de $\prod_{i=1}^N S_i = S$ dans $\kappa \times \mathbb{R}^N$ telle que pour chaque stratégie jouée s :

- 1) le projet accepté est $d(s)$
- 2) le transfert à l'agent i est $t_i(s)$, pour $i = 1, \dots, N$

Définition 3: Un mécanisme de révélation, $MR = \{V, f\}$, est un mécanisme pour lequel une stratégie est une fonction d'évaluation du projet public, et un espace de stratégies $S_i = V_i$ est un espace de fonctions d'évaluation admissibles ($V = \prod_{i=1}^N V_i$).

Dans un mécanisme de révélation, la question posée à l'agent est: quelle est votre fonction d'évaluation? De façon évidente, un tel mécanisme ne peut être utilisé que si les agents ont des fonctions d'utilité séparables. Dans ce cas, demander l'évaluation d'un projet public indépendamment de la spécification du transfert reçu a un sens. Nous notons $w_i(.)$ la fonction d'évaluation que l'agent répond; elle peut être différente de la fonction vraie $v_i(.)$

Soit $w(.) = [w_1(.), \dots, w_N(.)]$

Définition 4: Un mécanisme de révélation direct, $MRD = \{V, f\}$, est un mécanisme de révélation tel que:

$$d(s) = d(w(.)) \in \{K^*/K^* \in \kappa \text{ et } \sum w_i(K^*) = \max_{K \in \kappa} \sum w_i(K)\}.$$

La sélection $d(w(.))$, faite dans l'ensemble des projets, qui maximise la somme des fonctions d'évaluation est arbitraire; Ce mécanisme n'est bien défini que si l'ensemble des projets maximants est non vide. Puisque κ est un ensemble compact, une condition suffisante est que les fonctions d'évaluation soient semi continue supérieurement (s.c.s) sur κ .

$$\text{Soit } w_{-i}(.) = [w_1(.), \dots, w_{i-1}(.), w_{i+1}(.), \dots, w_N(.)]$$

$$\text{et } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j(.)$$

Définition 5: Un mécanisme de Groves, $MG = \{V, f\}$, est un mécanisme de révélation direct avec une règle de transfert spécifique définie par

$$t_i(w(.)) = \sum w_{-i}(d(w(.))) + h_i(w_{-i}(.))$$

où $h_i(w_{-i}(.))$ est une fonction déterministe arbitraire de $w_{-i}(.)$,

$i = 1, \dots, N$

Nous aurons besoin aussi d'un concept proche du mécanisme de Groves pour lequel les transferts et les décisions ne sont pas définis de façon unique.

Définition 6: Un mécanisme de Groves généralisé, $MGG = \{V, F\}$, est un ensemble d'espaces de fonctions d'évaluation admissibles, V_i , $i = 1, \dots, N$, une correspondance de décision $D(\cdot)$ de V dans K telle que chaque sélection $d(\cdot) \in D(\cdot)$ maxime $\sum w_{-i}(\cdot)$ un ensemble de correspondances déterministes arbitraires $H_i(\cdot)$ de $V_{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N V_j$ dans R , $i = 1, \dots, N$ telles que

$$t_i(w(\cdot)) = \sum w_{-i}(d(w(\cdot))) + h_i(w_{-i}(\cdot))$$

où $h_i(\cdot) \in H_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$, et $d(w(\cdot)) \in D(w(\cdot))$

De façon analogue, dans un mécanisme de révélation (direct) généralisé les applications de décision et de transferts sont à valeurs multiples $d(\cdot) \in D(\cdot)$, $t_i(\cdot) \in T_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, N$. De plus, dans un mécanisme de révélation direct généralisé, chaque $d(\cdot)$ maxime la somme des réponses.

d) Propriétés des mécanismes

Dans notre construction de mécanismes, nous sommes intéressés par un certain nombre de propriétés qui sont rassemblées ci-dessous.

Etant donné un mécanisme, soit $D_i(v_i(\cdot)) \subset S_i$ l'ensemble des stratégies dominantes de l'agent i lorsque sa vraie fonction d'évaluation est $v_i(\cdot)$.

Définition 7: Un mécanisme est dit décisif si et seulement si:

$$\forall i, \forall v_i(.) \in V_i, D_i(v_i(.)) \neq \emptyset$$

Soit, alors $S_i' = \bigcup_{v_i(.) \in V_i} D_i(v_i(.))$, l'ensemble des stratégies observables de l'agent i. Soit $S' = \prod_{i=1}^N S_i'$

Définition 8: Un mécanisme est dit heureux si et seulement si

$$\forall i, \forall s_i \in D_i(v_i(.)), d(s) \text{ maxime } \sum v_i(.).$$

Un mécanisme généralisé est dit heureux si chaque sélection $d(.) \in D(.)$ maxime $\sum v_i(.)$.

Un mécanisme heureux et décisif est dit satisfaisant.

L'utilité de la stratégie s pour l'agent i avec le mécanisme M s'écrit sans crainte de confusion:

$$u_i(s; M) = v_i(d(s)) + t_i(s)$$

Définition 9: Un mécanisme de révélation est dit fortement individuellement rationnel (f.i.r) si et seulement si la vérité est une stratégie dominante pour chaque agent, c'est-à-dire,

$$u_i(w_{-i}(.), v_i(.); MR) \geq u_i(w_{-i}(.), w_i(.); MR)$$

$$\forall w_{-i}(.), \forall w_i(.), \forall v_i(.), \forall v_{-i}(.)$$

Si nous avons dans κ le programme d'inaction, noté 0, par définition $v_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, N$. Pour un mécanisme de révélation, tel que $0 \in \kappa$, une stratégie $w_i(\cdot)$ est dite normalisée si $w_i(0) = 0$. Si toutes les stratégies sont normalisées, le mécanisme de révélation est dit normalisé.

B. Caractérisation

Sous l'hypothèse de séparabilité des fonctions d'utilité, nous montrons tout d'abord que les mécanismes de révélation heureux et f.i.r. sont des mécanismes de Groves; ensuite, nous montrons que tous les mécanismes satisfaisants sont isomorphes à des mécanismes de Groves (généralisés)

Théorème 1 [Groves et Loeb [1975]]

Un mécanisme de Groves est f.i.r.

Démonstration: Pour tout $w_{-i}(\cdot) \in V_{-i}$ et tout $w_i(\cdot) \in V_i$,

$$u_i(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot); MG) - u_i(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot); MG) =$$

$$v_i(d(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot))) + \sum w_{-i}(d(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot))) + h_i(w_{-i}(\cdot))$$

$$- v_i(d(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot))) - \sum w_{-i}(d(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot))) - h_i(w_{-i}(\cdot)) =$$

$$\text{Max}_{K \in \kappa} [v_i(K) + \sum w_{-i}(K)] - [v_i(d(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot))) + \sum w_{-i}(\cdot, w_i(\cdot))]$$

$K \in \kappa$

$$\geq 0$$

Q.E.D.

Théorème 2 Groves [1974]

L'ensemble des stratégies dominantes d'un mécanisme de Groves est $\{v_i(.) + \alpha_i\}$, où les α_i , $i = 1, \dots, N$, sont des constantes arbitraires. Il existe une seule stratégie dominante normalisée correspondant à $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Démonstration: Supposons qu'il existe une stratégie dominante, disons $v_i^!(.)$, qui ne soit pas de la forme $v_i(.) + \alpha_i$. Il existe alors $\epsilon > 0$, α , $K^* \in \kappa$, $K^{**} \in \kappa$ tels que:

$$v_i^!(K^*) = v_i(K^*) + \alpha$$

$$v_i^!(K^{**}) = v_i(K^{**}) + \alpha + \epsilon$$

Nous pouvons choisir $w_{-i}(.)$, s.c.s., tels que:

$$\sum w_{-i}(K^*) = -v_i(K^*) - \alpha$$

$$\sum w_{-i}(K^{**}) = -v_i(K^{**}) - \alpha - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\sum w_{-i}(K) = -\sup_{K \in \kappa} [v_i(K), v_i^!(K)] - \alpha - \epsilon$$

pour $K \in \kappa$, $K \neq K^*$, $K \neq K^{**}$

La réponse $v_i(.)$ conduit au projet K^* puisque $v_i(K^*) + \sum w_{-i}(K^*) > v_i(K) + \sum w_{-i}(K)$

$\forall K \neq K^*$

De même, la réponse $v_i(.)$ conduit au projet K^{**} puisque

$$v_i'(K^{**}) + \sum w_{-i}(K^{**}) > v_i'(K) + \sum w_{-i}(K) \quad \forall K \neq K^{**}$$

De plus, nous avons:

$$v_i(K^*) + \sum w_{-i}(K^*) > v_i(K^{**}) + \sum w_{-i}(K^{**})$$

$v_i'(.)$ n'est donc pas une stratégie dominante, une contradiction.

Toutes les stratégies dominantes doivent être de la forme $\{v_i(.) + \alpha_i\}$.

D'après le théorème 1, toutes les stratégies de la forme $\{v_i(.) + \alpha_i\}$ sont bien des stratégies dominantes.

Une stratégie normalisée de l'agent i est telle que $w_i(0) = 0$.

Puisque par définition $v_i(0) = 0$, $\alpha_i = 0$ pour une stratégie dominante normalisée.

Q.E.D.

Corollaire 1: Un mécanisme de Groves est heureux.

Démonstration: D'après le théorème 2 et la définition d'un mécanisme de Groves, nous savons que la décision prise maximise la somme des fonctions d'évaluation.

Q.E.D.

Corollaire 2: L'ensemble des stratégies dominantes d'un mécanisme de révélation f.i.r. est inclus dans l'ensemble $\{v_i(.) + \alpha_i\}$ où les α_i , $i = 1, \dots, N$, sont des constantes arbitraires. Il existe une seule stratégie dominante normalisée correspondant à $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Démonstration: Comme dans le théorème 2, nous montrons tout d'abord qu'une stratégie dominante de l'agent i doit être de la forme $\{v_i(.) + \alpha_i\}$. $v_i(.)$ est une stratégie dominante puisque le mécanisme est f.i.r. Comme dans le théorème 2, c'est aussi la seule stratégie dominante normalisée.

Q.E.D.

Définition 10: Un mécanisme de révélation direct satisfait la propriété A, si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, N$,

a) $t_i(w(.))$ est indépendant de $w_i(.)$ pour des $w_i(.)$ qui produisent la même décision $d(w)$, c'est-à-dire, si pour $w_{-i}(.), w_i(.), w_i'(.)$

$$d(w_{-i}(.), w_i(.)) = d(w_{-i}(.), w_i'(.)) \quad \text{alors:}$$

$$t_i(w_{-i}(.), w_i(.)) = t_i(w_{-i}(.), w_i'(.))$$

$$b) \quad t_i(w_{-i}(.), w_i(.)) - t_i(w_{-i}(.), w_i'(.)) = \sum w_{-i}(d(w.)) - \sum w_{-i}(d(w'(.)))$$

où $d(w(.))$ maxime $\sum w_{-i}(.) + w_i(.)$ sur κ

et $d(w'(.))$ maxime $\sum w_{-i}(.) + w_i'(.)$ sur κ

Lemme 1: Un mécanisme est un mécanisme de Groves si et seulement si, il satisfait la propriété A.

Démonstration: évidente.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre théorème de caractérisation fondamental.

Théorème 3 [Green et Laffont [1974]]

Un mécanisme de révélation direct f.i.r. est un mécanisme de Groves.

Démonstration: Nous considérons tour à tour la négation des deux parties de la propriété A.

Si a) n'est pas vérifié, il existe $w_{-i}(\cdot)$, $w_i(\cdot)$, $w_i'(\cdot)$ qui conduisent à la même décision $K^* = d(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot)) = d(w_{-i}(\cdot), w_i'(\cdot))$ et tels que:

$$t_i(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot)) > t_i(w_{-i}(\cdot), w_i'(\cdot))$$

Soit $v_i(\cdot) = w_i'(\cdot)$. Nous avons

$$t_i(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot)) + v_i(K^*) > t_i(w_{-i}(\cdot), v_i(\cdot)) + v_i(K^*)$$

$v_i(\cdot)$ n'est donc pas une stratégie dominante, une contradiction.

Si b) n'est pas vérifié, il existe $w_{-i}(\cdot)$, $w_i(\cdot)$, $w_i'(\cdot)$ tels que

$$K^* \text{ maxime } \sum w_{-i}(\cdot) + w_i(\cdot) \text{ sur } \kappa$$

$$K^{*'} \text{ maxime } \sum w_{-i}(\cdot) + w_i'(\cdot) \text{ sur } \kappa$$

$$\text{et } t_i(w_{-i}(\cdot), w_i(\cdot)) - t_i(w_{-i}(\cdot), w_i'(\cdot)) = \sum w_{-i}(K^*) - \sum w_{-i}(K^{*'}) + \varepsilon$$

pour un $\varepsilon > 0$.

Considérons $\tilde{w}_i^!(.)$ défini de la façon suivante:

$$\tilde{w}_i^!(K^*) = - \sum w_{-i}(K^*)$$

$$\tilde{w}_i^!(K^{*'}) = - \sum w_{-i}(K^{*'}) + \delta \quad \text{avec } 0 < \delta < \varepsilon$$

$$w_i^!(K) = -C \quad \text{pour } K \neq K^*, K \neq K^{*'}$$

$$\text{avec } C > \max_{K \in \kappa} \sum w_{-i}(K)$$

$w_i^!(.)$ est s.c.s.

Notons qu'alors $K^{*'}$ maxime $\tilde{w}_i^!(.) + \sum w_{-i}(.)$ sur κ , et, par conséquent, d'après a)

$$t_i(w_{-i}(.), w_i^!(.)) = t_i(w_{-i}(.), \tilde{w}_i^!(.))$$

Nous avons donc:

$$t_i(w_{-i}(.), w_i^!(.) - t_i(w_{-i}(.), \tilde{w}_i^!(.)) = \sum w_{-i}(K^*) - \sum w_{-i}(K^{*'}) + \varepsilon$$

$$= -\tilde{w}_i^!(K^*) + \tilde{w}_i^!(K^{*'}) + \varepsilon - \delta$$

Ainsi:

$$t_i(w_{-i}(.), w_i^!(.)) + \tilde{w}_i^!(K^*) > t_i(w_{-i}(.), \tilde{w}_i^!(.)) + \tilde{w}_i^!(K^{*'})$$

Par conséquent, lorsque $v_i(.) \equiv \tilde{w}_i^!(.)$, la réponse $w_i(.)$ est préférable, ce qui contredit le fait que le mécanisme est f.i.r.

Q.E.D.

Corollaire 2: Si les fonctions d'évaluation admissibles sont restreintes à la classe des fonctions continues, la famille des mécanismes de Groves est identique à la classe des mécanismes de révélation directs et f.i.r.

Démonstration: Il suffit de montrer que dans la démonstration du théorème 3, $\tilde{w}_i^!(.)$ peut être choisi continu et tel que

$$1) K^{*'} \text{ maxime } \tilde{w}_i^!(.) + \sum w_{-i}(.) \text{ sur } \kappa$$

$$2) \tilde{w}_i^!(K^{*'}) = - \sum w_{-i}(K^{*'})$$

$$3) \tilde{w}_i^!(K^{*'}) = - \sum w_{-i}(K^{*'}) + \delta$$

Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < |K^{*} - K^{*'}|$ et

$$\tilde{w}_i^!(K) = - \sum w_{-i}(K) \quad \text{pour } K \notin [K^{*'} - \eta, K^{*'} + \eta]$$

$$= - \sum w_{-i}(K) + \delta \left(1 - \frac{|K - K^{*'}|}{\eta}\right) \text{ pour } K \in [K^{*'} - \eta, K^{*'} + \eta]$$

Par construction $\tilde{w}_i^!(.)$ est continu puisque les $w_j(.)$, $j \neq i$, sont continus et satisfait 2) et 3). De plus, il est facile de voir que 1) est aussi satisfait puisque nous avons toujours:

$$\tilde{w}_i^!(K) + \sum w_{-i}(K) < \delta \quad \text{pour } K \neq K^{*'}$$

Q.E.D.

Théorème 4:

Un mécanisme de révélation normalisé, f.i.r., et heureux est un mécanisme de Groves.

Démonstration: Puisque le mécanisme de révélation est f.i.r. et normalisé, les agents vont répondre leur fonction d'évaluation vraie $v_i(.)$, $i = 1, \dots, N$ d'après le Corollaire 2. Puisque de plus le mécanisme est heureux, nous pouvons dire que la décision est prise en maximant la somme des réponses. C'est donc un mécanisme de révélation direct, d'où le résultat d'après le théorème 3.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant étendre la caractérisation aux mécanismes satisfaisants.

Théorème 5 [Green et Laffont [1975a]]

Un mécanisme satisfaisant (S, f) qui satisfait la propriété d'unicité des stratégies dominantes est tel que:

$$\exists \psi_i, i = 1, \dots, N \quad \psi_i: S_i' \rightarrow V_i$$

$\exists$ mécanisme de Groves normalisé, $\{V, g\}$, tels que

$$f(s) = g[\psi_1(s_1), \dots, \psi_N(s_N)]$$

Démonstration: Soit $D_i(v_i(.))$, l'unique stratégie dominante de l'agent i , lorsque la vérité est $v_i(.)$, $i = 1, \dots, N$. A partir du mécanisme (S, f) , nous construisons un mécanisme de révélation normalisé (V, ϕ) de la façon suivante. Soit

$$\phi(w(.)) = f[D(w(.))] \text{ pour tout } w(.) \in V$$

où $V = \prod_i V_i$ et V_i est l'espace des fonctions d'évaluation normalisées et s.c.s.

Le mécanisme de révélation (V, ϕ) est bien défini puisque

$D_i(v_i(.))$ est un singleton pour $i = 1, \dots, N$ (V, ϕ) est f.i.r.

Supposons en effet qu'il ne le soit pas. Pour des $v_i(.), w_{-i}(.)$ donnés, il existe $w_i(.) \neq v_i(.)$ avec $\phi(w_{-i}(.), w_i(.))$ préféré par l'agent i à $\phi(w_{-i}(.), v_i(.))$, c'est-à-dire $f[D_{-i}(w_{-i}(.)), D_i(w_i(.))]$ préféré à $f[D_{-i}(w_{-i}(.)), D_i(v_i(.))]$ où $D_i(w_{-i}(.)) = [D_1(w_1(.)), \dots, D_{i-1}(w_{i-1}(.)), D_{i+1}(w_{i+1}(.)), \dots, D_N(w_N(.))]$ ou encore

$$u_i(D_{-i}(w_{-i}(.)), D_i(w_i(.)); \{S, f\}) > u_i(D_{-i}(w_{-i}(.)), D_i(v_i(.)); \{S, f\})$$

ce qui contredit le fait que $D_i(v_i(.))$ est une stratégie dominante pour l'agent i .

Le mécanisme de révélation (V, ϕ) est heureux puisqu'il a les mêmes résultats que (S, f) .

Par conséquent, (V, ϕ) est un mécanisme de révélation normalisé, f.i.r. et heureux. D'après le théorème 4, c'est donc un mécanisme de Groves normalisé.

Enfin, pour montrer que les fonctions $D_i^{-1}(.), i = 1, \dots, N$ existent, nous démontrons que D_i est univoque, $i = 1, \dots, N$.

Supposons que D_i ne soit pas univoque. Il existe alors $v_i(.)$ et $v_i'(.)$ dans V_i , tels que $v_i(.) \neq v_i'(.)$ et $D_i(v_i(.)) = D_i(v_i'(.))$. Par définition $v_i(0) = v_i'(0) = 0$, mais puisque $v_i(.) \neq v_i'(.)$, il existe $K \in \kappa$ tel que $v_i(K) \neq v_i'(K)$.

Sans perte de généralité, soit alors K^* tel que

$$v_i(K^*) - v_i^!(K^*) = \varepsilon$$

et

$$A = \sup_{K \in \kappa} [\sup_{K \in \kappa} v_i(K), \sup_{K \in \kappa} v_i^!(K)]$$

Nous pouvons alors choisir $v_{-i}(\cdot)$ tels que

$$\sum v_{-i}(K^*) = -v_i^!(K^*) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum v_{-i}(0) = 0$$

$$\sum v_{-i}(K) = -A - \varepsilon$$

Par suite, il est clair que:

$$\sum v_{-i}(K^*) + v_i(K^*) > \sum v_{-i}(K) + v_i(K)$$

$$\forall K \in \kappa, K \neq K^*$$

et

$$\sum v_{-i}(0) + v_i^!(0) > \sum v_{-i}(K) + v_i^!(K)$$

$$\forall K \in \kappa, K \neq 0$$

Nous avons donc été capables de construire $v_{-i}(\cdot)$ s.c.s, tels que $[v_{-i}(\cdot), v_i(\cdot)]$ et $[v_{-i}(\cdot), v_i^!(\cdot)]$ devraient conduire à des décisions différentes. Or elles ne le font pas, contredisant le fait que (V, ϕ) est heureux.

Par conséquent, $D_i(\cdot)$ est univoque pour $i = 1, \dots, N$. Si

nous définissons $\psi_i = D_i^{-1}(\cdot)$ de S_i' dans V_i

$$g[\psi_1(s_1), \dots, \psi_N(s_N)] = f[D_1 \circ D_1^{-1}(s_1), \dots, D_N \circ D_N^{-1}(s_N)] = f(s)$$

Q.E.D.

Si nous abandonnons l'hypothèse d'unicité dans le théorème 5, nous obtenons seulement une caractérisation plus faible. En effet, considérons l'exemple suivant:

Soit $\kappa = \{0, 1\}$, $S_i = \mathbb{R}^2$, $s_i = (s_{i1}, s_{i2})$, $i = 1, \dots, N$;
définissons le mécanisme par

$$\begin{aligned} d(s) &= 1 && \text{si } \sum s_{i1} \geq 0 \\ &= 0 && \text{si } \sum s_{i1} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_i(s) &= \sum s_{-i1} + \sum s_{-i2} && \text{si } d(s) = 1 \\ &= \sum s_{-i2} && \text{si } d(s) = 0 \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, N$.

L'ensemble des stratégies dominantes est alors:

$$D_i(v_i(\cdot)) = \{(s_{i1}, s_{i2}) \in \mathbb{R}^2 / s_{i1} = v_i(1)\}.$$

Par conséquent, le mécanisme ne peut être représenté sous la forme $g[\psi(s)]$ pour quelque mécanisme de Groves que ce soit, puisque les $t_i(s)$, $i = 1, \dots, N$, ne sont pas constants sur $\prod_{i=1}^N D_i(v_i(\cdot))$.

Cependant, on peut montrer que tous les mécanismes de Groves sont isomorphes à des mécanismes de Groves généralisés.

Théorème 6

Soit (S, f) un mécanisme satisfaisant. Il existe des fonctions ψ_i de S_i dans V_i , $i = 1, \dots, N$ et un mécanisme de Groves généralisé (V, G) tel que

$$\bigcup_{s' \in S(s)} f(s') = G[\psi_1(s_1), \dots, \psi_N(s_N)]$$

où $S(s) = \{s' / s \text{ et } s' \text{ appartiennent au même } D(w(.))\}$

Démonstration: Il est immédiat de vérifier que les théorèmes 2, 3, 4 sont vrais pour des mécanismes de révélation (directs) généralisés. La démonstration du théorème 6 suit alors les lignes de la démonstration du théorème 4 avec quelques différences notées ci-dessous.

$D_i(v_i(.))$ est maintenant l'ensemble des stratégies dominantes de l'agent i , lorsque sa vraie fonction d'évaluation est $v_i(.,.)$, $i = 1, \dots, N$. Nous construisons un mécanisme de révélation normalisé et généralisé de la façon suivante. Soit V_i l'ensemble des fonctions d'évaluation s.c.s. et normalisés et soit

$$\Phi(w(.)) = f[D(w(.))] \quad \forall w(.) \in V$$

Φ est maintenant une correspondance avec deux propriétés:

$s^1 \in D(v(.))$ et $s^2 \in D(v(.))$ impliquent que $d(s^1)$ et $d(s^2)$ maximisent tous deux $\sum v_i(.,.)$, sinon le mécanisme ne serait pas heureux.

Egalement, $v_i(d(s^1)) + T_i(s^1) > v_i(d(s^2)) + T_i(s^2)$ sinon, il existerait $t_i(.) \in T_i(.)$ tel que, sans perte de généralité,

$$v_i(d(s^1)) + t_i(s^1) > v_i(d(s^2)) + t_i(s^2)$$

s_i^2 ne serait plus alors une stratégie dominante pour l'agent i .

Comme dans le théorème 5, on montre que (V, Φ) est f.i.r. D'après le théorème 4, (V, Φ) est un mécanisme de Groves normalisé et généralisé.

Maintenant si $v_i(.) \neq v_i'(.)$, alors $D_i(v_i(.)) \cap D_i(v_i'(.)) = \emptyset$

Supposons au contraire, qu'il existe $s_i \in D_i(v_i(.)) \cap D_i(v_i'(.))$.

Dans ce cas, $v_i(.)$ et $v_i'(.)$ peuvent conduire au même projet K^* .

Comme dans le théorème 5, on peut choisir $w_i(.)$ de telle sorte que $v_i(.)$ et $v_i'(.)$ devraient conduire à différents projets, contredisant le fait que (V, Φ) soit heureux.

Il est donc possible de définir la fonction $\psi_i(.) = D_i^{-1}(.)$, $i = 1, \dots, N$ qui est telle que:

$$D_i \circ D_i^{-1}(s_i) = S_i(s_i) = \{s_i'/s_i \text{ et } s_i' \text{ appartiennent au même } D_i(v_i(.))\}$$

Alors

$$\Phi[\psi_1(s_1), \dots, \psi_N(s_N)] = f[D_1 \circ D_1^{-1}(s_1), \dots, D_N \circ D_N^{-1}(s_N)]$$

$$= \bigcup_{s' \in S(s)} f(s)$$

Q.E.D.

III. Nécessité de l'hypothèse de séparabilité

L'hypothèse de séparabilité est cruciale dans l'obtention des résultats de la section précédente. En effet, dès que l'on essaie de l'affaiblir, il peut ne pas exister de mécanisme satisfaisant. Nous allons montrer ce résultat en deux étapes, dans le cas d'un projet unique de taille fixe.

Tout d'abord, nous devons modifier quelque peu certaines définitions. Maintenant, dans un mécanisme de révélation la question posée à l'agent est: quelle est votre fonction d'utilité normalisée de telle sorte que l'utilité du programme (inaction 0 + transfert t) égale le transfert t .

Pour une fonction d'utilité séparable nous avons:

$$u_i(0, t_i) = t_i$$

$$u_i(1, t_i) = t_i + v_i, v_i \in \mathbb{R}.$$

Un exemple de fonction d'utilité non séparable est:

$$u_i(0, t_i) = t_i$$

$$u_i(1, t_i) = t_i + v_i(t_i), v_i(.) \text{ s.c.s. sur } \mathbb{R}.$$

Dans le cas séparable l'évaluation du projet est une constante, tandis que c'est une fonction du transfert dans le cas non séparable.

Nous dirons qu'un mécanisme de révélation direct est heureux si pour tout programme de transferts $(t_1, \dots, t_N)$, $f(w(.))$ maxime

$$\sum_{i=1}^N u_i(w(.), \text{MRD}).$$

Nous dirons qu'un mécanisme de révélation est f.i.r., si la vraie fonction d'utilité normalisée est une stratégie dominante.

Nous pouvons alors formuler le:

Théorème 7:

Si l'espace des fonctions d'évaluation admissibles inclut toutes les fonctions constantes (c'est-à-dire indépendantes des transferts) et au moins une fonction telle que $t_i + v_i(t_i)$ soit monotone croissante, il n'existe pas de mécanisme de révélation normalisé, f.i.r. et heureux.

Démonstration: Nous démontrons le théorème en exhibant un contre-exemple. Considérons les deux agents suivants:

L'agent 1 est tel que:

$$u_1(0, t_1) = t_1$$

$u_1(1, t_1) = t_1 + c$, c'est-à-dire, il a une fonction d'utilité séparable.

L'agent 2 est tel que:

$$u_2(0, t_2) = t_2$$

$$\begin{aligned} u_2(1, t_2) &= t_2 + a && \text{si } t_2 < x \\ &= t_2 + b && \text{si } t_2 \geq x \end{aligned} \quad \text{avec } a < b$$

c'est-à-dire, l'évaluation de l'agent 2 croît lorsque le transfert reçu atteint une valeur limite.

Un mécanisme de révélation direct doit ici associer à un quadruple (c, a, b, x) un vecteur $(d, t_1, t_2) \in \{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$ où d est la décision et (t_1, t_2) le programme de transferts.

Considérons un triplet particulier (a, b, c) qui restera fixe dans la suite et tel que:

$$a + c < 0 \quad b + c > 0 \quad c < 0 \text{ et faisons varier } x.$$

Le mécanisme est heureux si:

$$t_2 < x \quad \text{entraîne } d = 0 \quad \text{puisque } a + c < 0$$

$$t_2 \geq x \quad \text{entraîne } d = 1 \quad \text{puisque } b + c > 0.$$

Nous démontrons qu'il n'existe pas de mécanisme de révélation direct f.i.r. et heureux par contradiction.

Lemme 1: Il n'est pas vrai que le projet soit accepté pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration: Toutes les fois que le projet est accepté $t_2 > x$ puisque le mécanisme est heureux. Alors, si le projet était accepté pour tout x , l'agent aurait intérêt à choisir un x aussi grand que possible, puisque $u_1(1, t_2)$ est croissant en t_2 , contredisant la propriété de f.i.r.

Q.E.D.

Lemme 2: Il n'est pas vrai que le projet soit rejeté pour tout $x \in R$.

Démonstration: Si le projet était rejeté pour tout x , le transfert à l'agent 2 serait donné par une fonction $t_2(x)$ partout inférieure à x . Il est clair qu'aucune fonction constante n'a cette propriété. Soit alors x' et x'' tels que $t_2(x') < t_2(x'')$, si les vraies préférences correspondent à x' , l'individu a intérêt à choisir x'' puisque $u_2(0, t_2)$ est croissante en t_2 .

Q.E.D.

Soit X l'ensemble des x qui conduisent à l'acceptation du projet et X' le complément dans R de cet ensemble.

Lemme 3: Les transferts à l'agent 2 doivent être constants sur X et sur X' .

Démonstration: S'il n'en est pas ainsi (par exemple sur X), et si la vraie valeur $x_0 \in X$ est associée à un transfert plus faible qu'une autre valeur $x_1 \in X$, la réponse x_1 est préférable pour l'agent 2 à la réponse x_0 puisque $u_2(1, t_2)$ est croissant en t_2 , contredisant la propriété de f.i.r. Le même raisonnement vaut pour X' .

Q.E.D.

Soit $x \in X$ et $x' \in X'$

Lemme 4: $t_2(x) = t_2(x') + c$

Démonstration: Tout d'abord, comparons le transfert associé à la réponse (a, b, x) au transfert associé à la réponse constante e , où

e est tel que $e \geq -c$. Ces transferts doivent être égaux, car s'ils étaient plus élevés pour (a,b,x) , alors (a,b,x) devrait être répondu à la place de e lorsque la vérité correspond à e , et vice versa; puisque $u_2(1,t_2)$ est croissante en t_2 .

Par un raisonnement analogue, le transfert associé à la réponse (a,b,x') doit être égal au transfert associé à la réponse constante e' , telle que $e' < -c$.

Alors, d'après le théorème 2 et le lemme 1 de la section 2, nous savons que le transfert pour $e \geq -c$ égale le transfert pour $e' < -c$ plus c .

Q.E.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 7.

Démonstration: D'après les lemmes ci-dessus, nous savons qu'il existe un nombre $\bar{t}$ tel que le transfert à l'agent 2 est $\bar{t} + c$ pour tout $x \in X$ (projet accepté), et le transfert est $\bar{t}$ pour tout $x \in X'$ (projet rejeté).

Puisque le mécanisme est heureux, $x \in X$ entraîne que $x \leq \bar{t} + c$ car si $x > \bar{t} + c$, les préférences à $\bar{t} + c$ conduiraient au rejet plutôt qu'à l'acceptation du projet.

De même, $x' \in X'$ entraîne $x' > \bar{t}$.

Si nous prenons $\bar{x} \in (\bar{t} + c, \bar{t})$, nous obtenons une contradiction à $\bar{x} \in X$ et $\bar{x} \in X'$, c'est-à-dire au fait qu'un mécanisme de révélation direct est bien défini.

Q.E.D.

Remarques

1. Il est clair d'après la démonstration ci-dessus que la constance des évaluations sur les ensembles $\{t/t \geq x\}$ et $\{t/t < x\}$ n'est pas nécessaire pour obtenir le contreexemple. Le trait crucial est que $u_2(1, t_2)$ soit croissante en t_2 et que les ensembles définis dans la démonstration du théorème précédent ne recouvrent pas R : $v_2(t) = a + t$, continue, est admissible.

2. Notons que nous obtenons le même résultat avec une définition différente du concept "heureux", où pour tout programme de transferts $(t_1, \dots, t_N)$, $f(w(.))$ maxime $\sum_{i=1}^N \lambda_i u_i(w(.); MRD)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, N$

Dans le contre exemple il suffit de prendre $u_2 + \lambda u_1$ et de remplacer c par $c' = \lambda c$. Notons aussi que ces définitions de "heureux" sont très faibles et n'exigent pas que pour tout $T = \sum_i t_i$, $f(s)$ maxime une somme d'utilités, notion qui serait proche du concept d'optimum de Pareto dans une économie avec un $N + 1$ ème agent, l'Etat.

Théorème 8: Sous les conditions du théorème 7, il n'existe pas de mécanisme satisfaisant.

Démonstration: Notons tout d'abord que d'un mécanisme de révélation normalisé et généralisé, nous pouvons extraire un mécanisme de révélation normalisé. Supposons alors qu'il existe un mécanisme satisfaisant. D'après la première partie du théorème 6 (section 2) et la remarque précédente, il existe un mécanisme de révélation f.i.r., heureux et normalisé, une contradiction en vue du théorème 7.

Q.E.D.

IV. Equilibre du budget de l'Etat

Une difficulté importante associée aux mécanismes étudiés dans les sections précédentes est qu'ils n'équilibrent pas de façon automatique le budget de l'institution qui organise la consultation des agents économiques. En effet, la somme des transferts nécessaires pour amener les agents à révéler la vérité, $\sum t_i(w)$ n'est nulle qu'en des circonstances fortuites. Ces déficits ou surplus peuvent être absorbés par imposition ou subvention en dehors du mécanisme, mais il est nécessaire, pour conserver la propriété de rationalité individuelle, de supposer que les agents ne réalisent pas l'existence de ces impôts ou subventions lorsqu'ils formulent leurs réponses aux questions du mécanisme.

En vue de cette faiblesse, Groves et Ledyard [1975] ont construit une famille de mécanismes qui, en présence de biens publics, permettent d'atteindre des optima de Pareto dans un cadre d'équilibre général. Pour obtenir ces résultats, ils doivent en raison des théorèmes de caractérisation des sections précédentes, affaiblir le résultat de Groves [1973] en ce qui concerne les propriétés de non manipulation. La révélation des vraies disponibilités marginales à payer pour les biens publics a lieu à l'équilibre; en d'autres mots, Groves et Ledyard [1975] doivent abandonner le résultat, selon lequel la vérité est une stratégie dominante, qui élimine tous les problèmes de théorie des jeux de nature non coopérative. De plus, la nécessité d'une procédure de tâtonnement pour atteindre l'équilibre suggère que la question de manipulation la plus pertinente concerne la manipulation le long du processus dynamique qui conduit à l'équilibre (voir à ce sujet Hurwicz

[1975]).

Les mécanismes étudiés dans les sections 2 et 3, ont par la propriété de stratégie dominante, des possibilités d'applications importantes (voir Green et Laffont [1974b] [1975b]). C'est pourquoi il est crucial de montrer que le problème soulevé ci-dessus peut être résolu de façon satisfaisante pour ne pas remettre en cause l'intérêt des mécanismes de Groves. Notre objectif dans cette section est de montrer d'une part que la somme des transferts peut être rendue négligeable, et d'autre part, que si on redistribue cette somme de transferts la stratégie optimale des agents est très proche de la vérité. Ces résultats sont établis dans le cas d'un projet unique de taille fixe, c'est-à-dire $\kappa = \{0,1\}$.

1. Impossibilité d'équilibrer le budget

Nous montrons dans cette sous-section qu'il est impossible de trouver un mécanisme de Groves particulier, c'est-à-dire, une fonction $h(.) = (h_1(.), \dots, h_N(.))$ particulière, telle que la somme des transferts nécessaires soit nulle quelles que soient les vraies disponibilités à payer. Ce théorème d'impossibilité montre que l'on doit s'orienter vers des solutions approchées si on veut conserver la propriété de stratégie dominante. Diverses notions de solution approchée sont explorées par la suite.

Théorème 9 : Il n'existe pas de mécanisme de Groves tel que

$$\sum t_i(w) = 0 \quad \forall w \in V$$

Démonstration : Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une fonction vectorielle $h(.)$ telle que

$$\sum t_i(w) = 0 \quad \forall w \in V.$$

Considérons tout d'abord le cas $N = 2$. Soit w_1^+ , w_1^- , w_2 tel que $w_1^+ + w_2 > 0$ et $w_1^- + w_2 < 0$. Par définition, nous avons alors :

$$(4.1) \quad w_1^+ + w_2 + h_1(w_2) + h_2(w_1^+) = 0$$

$$(4.2) \quad h_1(w_2) + h_2(w_1^-) = 0$$

Soustrayons (4.2) de (4.1) ; nous obtenons :

$$(4.3) \quad w_1^+ + h_2(w_1^+) - h_2(w_1^-) = -w_2$$

Si nous varions w_2 de sorte que $w_1^+ + w_2$ reste positif, nous avons par (4.3) une contradiction puisque le membre de gauche ne dépend pas de w_2 .

Considérons maintenant le cas $N = 3$. Soit w_1^0 , w_2^0 , w_3^- tel que $w_1^0 + w_2^0 + w_3^- < 0$. Par définition :

$$(4.4) \quad h_1(w_2^0, w_3^-) + h_2(w_1^0, w_3^-) + h_3(w_1^0, w_2^0) = 0$$

Soit w_3^+ tel que $w_1^0 + w_2^0 + w_3^+ > 0$. Par définition :

$$(4.5) \quad h_1(w_2^0, w_3^+) + h_2(w_1^0, w_3^+) + h_3(w_1^0, w_2^0) = -2(w_1^0 + w_2^0 + w_3^+)$$

Soustrayons (4.5) de (4.4) :

$$(4.6) \quad h_1(w_2^0, w_3^-) + h_2(w_1^0, w_3^-) - h_1(w_2^0, w_3^+) - h_2(w_1^0, w_3^+) \\ = 2(w_1^0 + w_2^0 + w_3^+)$$

Comme le membre de droite de (4.6) ne dépend pas de w_3^- , le membre de gauche ne peut en dépendre. Choisissons w_3^0 tel que $w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 < 0$ et définissons les fonctions suivantes :

$$\delta_{1,w_2^0}(w_3) = h_1(w_2^0, w_3^0) - h_1(w_2^0, w_3)$$

$$\delta_{2,w_1^0}(w_3) = h_2(w_1^0, w_3^0) - h_2(w_1^0, w_3)$$

En particulier, nous avons :

$$(4.7) \quad \delta_{1,w_2^0}(w_3^-) = -\delta_{2,w_1^0}(w_3^-)$$

Considérons alors un voisinage de w_1^0 tel que pour tout w_1 dans ce voisinage $w_1 + w_2^0 + w_3 < 0$. Soit 3θ le diamètre de ce voisinage. Par (4.7),

$\delta_{2,w_1}(w_3)$ est indépendant de w_1 dans ce voisinage, en particulier sur

l'intervalle $[w_1^0, w_1^0 + \theta]$. Considérons maintenant un voisinage de w_2^0 tel que pour tout w_2 dans ce voisinage $(w_1^0 + \theta) + w_2 + w_3^- < 0$. Nous pouvons le choisir de façon à inclure l'intervalle $[w_2^0 - \theta, w_2^0]$

Par (4.7), nous avons :

$$(4.8) \quad \delta_{1,w_2^0}(w_3^-) = -\delta_{2,w_2^0}(w_3^-) = -\delta_{2,w_1^0 + \theta}(w_3^-) = \delta_{1,w_2}(w_3^-)$$

pour tout $w_2 \in [w_2^0 - \theta, w_2^0]$

De la même façon, nous obtenons :

$$(4.9) \quad \delta_{1,w_2^0}(w_3^-) = \delta_{1,w_2}(w_3^-) \quad \forall w_2 \leq w_2^0$$

$$(4.10) \quad \delta_{2,w_1^0}(w_3^-) = \delta_{2,w_1}(w_3^-) \quad \forall w_1 \geq w_1^0$$

Par symétrie, nous avons (4.9) pour tout w_2 et (4.10) pour tout w_1 .

Nous pouvons maintenant faire varier w_3^- et répéter la démonstration avec des w_2^0, w_1^0 appropriés. Nous obtenons que $\delta_{1,w_2}(\cdot)$ est indépendant de w_2 et $\delta_{2,w_1}(\cdot)$ est indépendant de w_1 . Soient $\delta_1(\cdot)$ et $\delta_2(\cdot)$ ces fonctions.

Considérons $\widehat{w}_3$ et répétons la démonstration précédente pour $w_3^- = \widehat{w}_3$ de telle sorte que le choix de w_3^0 (ici $\widehat{w}_3^0$) puisse rester inchangé pour tout w_3 dans un voisinage N de $\widehat{w}_3$.

Pour tout w_1, w_2 et tout w_3 dans N

$$\delta_1(w_3) = h_1(w_2, \widehat{w}_3^0) - h_1(w_2, w_3)$$

$$\delta_2(w_3) = h_2(w_1, \widehat{w}_3^0) - h_2(w_1, w_3)$$

Choisissons $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2$ tels que $\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 + \widehat{w}_3 > 0$ pour tout w_3 dans N. Nous avons :

$$\begin{aligned} \Sigma t_i(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \widehat{w}_3) &= 2(\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 + \widehat{w}_3) + h_1(\widehat{w}_2, \widehat{w}_3) + h_2(\widehat{w}_1, \widehat{w}_3) + h_3(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) \\ (4.11) \quad &= 2(\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 + \widehat{w}_3) + h_1(\widehat{w}_2, \widehat{w}_3^0) - \delta_1(\widehat{w}_3) + h_2(\widehat{w}_1, \widehat{w}_3^0) \\ &\quad - \delta_2(\widehat{w}_3) + h_3(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) = 0 \end{aligned}$$

De même pour tout $w_3 \in N$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \Sigma t_i(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, w_3) &= 2(\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 + w_3) + h_1(\widehat{w}_2, \widehat{w}_3^0) - \delta_1(w_3) \\ &+ h_2(\widehat{w}_1, \widehat{w}_3^0) - \delta_2(w_3) + h_3(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $\delta_2(w_3) = -\delta_1(w_3)$ pour $w_3 \in N$, la soustraction de (4.12) de (4.11) donne $w_3 = \widehat{w}_3$, une contradiction.

Pour $N > 3$, une démonstration analogue au cas $N = 3$ est obtenue en fixant dans le raisonnement w_j pour $j > 3$

Q.E.D.

2. Le mécanisme à pivot.

Nous considérons le mécanisme à pivot qui correspond au choix particulier suivant de la fonction $h_i(.)$ dans la famille de mécanismes de

Groves:

$$\begin{aligned} h_i(w_{-i}) &= -\Sigma w_{-i} \quad \text{si } \Sigma w_{-i} \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } \Sigma w_{-i} < 0. \end{aligned}$$

La règle de transferts est alors, pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} t_i(w) &= 0 \quad \text{si } \Sigma w_i \geq 0 \quad \text{et } \Sigma w_{-i} \geq 0 \\ &= \Sigma w_{-i} \quad \text{si } \Sigma w_i \geq 0 \quad \text{et } \Sigma w_{-i} < 0 \\ &= -\Sigma w_{-i} \quad \text{si } \Sigma w_i < 0 \quad \text{et } \Sigma w_{-i} \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } \Sigma w_i < 0 \quad \text{et } \Sigma w_{-i} < 0. \end{aligned}$$

Notons que le mécanisme conduit à des transferts qui sont toujours négatifs, de sorte qu'on fait toujours face à un excédent à redistribuer. Les agents qui payent la taxe sont ceux dont la réponse change le signe de l'agrégat - ces agents sont des pivots. Ils paient le montant du dommage qu'ils imposent aux autres participants par leur réponse. Ce mécanisme est l'analogie, dans le cas des biens publics, du mécanisme d'enchères proposé par Vickrey [1961], dans lequel l'objet de l'enchère revient à l'agent qui a proposé le montant le plus élevé à un prix égal à la deuxième enchère.

3. Approche statistique

Nous considérons les disponibilités à payer des agents comme les résultats de tirages successifs indépendants dans une population donnée. Approximons d'autre part la distribution discrète de cette population par une distribution continue $F(.)$. Nous pouvons calculer ainsi la somme espérée des impôts nécessaires au mécanisme à pivot pour un projet quelconque. Si le mécanisme est utilisé pour évaluer de nombreux projets publics potentiels, nous serons satisfaits si la somme espérée est négligeable.

De fait, nous montrons ci-après pour des distributions particulières que la somme espérée des impôts croît seulement comme la racine carrée de la taille de la population quand la moyenne de la distribution est nulle et converge vers zéro lorsque le nombre d'agents croît quand la moyenne de la distribution est non nulle.

Soit $F(.)$ la distribution de la disponibilité à payer d'un agent et $F_{N-1}(.)$ la distribution de la somme x des $N-1$ autres agents. D'après la définition du mécanisme à pivot, l'agent est un pivot si

$$|x| < |v|$$

$$\text{et } v < 0 < x$$

$$\text{ou } x < 0 < v$$

L'agent qui est un pivot doit payer $|x|$.

La somme espérée des paiements est donc:

$$E_N = N \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x/|x| < |v| \text{ et } xv < 0\}} |x| d\Gamma_{N-1}(x)$$

Supposons tout d'abord que les v_i sont distribués de façon indépendante selon une loi normale de moyenne zéro et de variance unité. Dans ce cas

$$\begin{aligned} E_N &= 2N \int_{-\infty}^0 dF(v) \int_0^{-v} x d\Gamma_{N-1}(x) \\ &= \frac{N}{\pi \sqrt{N-1}} \int_{-\infty}^0 e^{-v^2/2} dv \int_0^{-v} x e^{-x^2/2(N-1)} dx \\ &= \frac{N \sqrt{N-1}}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}v^2} (1 - e^{-v^2/2(N-1)}) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [N \sqrt{N-1} - (N-1) \sqrt{N}] \end{aligned}$$

Mais

$$\sqrt{N-1} = \sqrt{N} - \frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{1}{8N\sqrt{N}} + \dots$$

D'où

$$E_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sqrt{N}}{2} - \frac{1}{8\sqrt{N}} + \dots \right]$$

Par conséquent les paiements espérés par tête décroissent comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour N grand.

Lorsque la moyenne de la loi normale n'est plus nulle on obtient un résultat beaucoup plus fort

$$E_N(\mu) = \frac{N}{\sqrt{2\pi(N-1)}} \int_0^{\infty} \rho(-x-\mu) x e^{-\frac{(x-(N-1)\mu)^2}{2(N-1)}} dx$$

$$= - \frac{N}{\sqrt{2\pi(N-1)}} \int_{-\infty}^0 \rho(x+\mu) x e^{-\frac{(x-(N-1)\mu)^2}{2(N-1)}} dx$$

$$\text{où} \quad \rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-z^2/2} dz$$

Il est facile de voir que la limite de $E_N(\mu)$ lorsque N croît dépend de

$$\frac{\partial e^{-\frac{(x-(N-1)\mu)^2}{2(N-1)}}}{\partial N} = -\frac{1}{2} \left[\mu^2 - \frac{x^2}{(N-1)^2} \right] e^{-\frac{(x-(N-1)\mu)^2}{2(N-1)}}$$

Lorsque $\mu = 0$, cette expression est positive pour tout N mais dès que $\mu \neq 0$, elle est négative pour N assez grand. Dans ce dernier cas, le signe de la dérivée de E_N est ambigu. De fait, les simulations du paragraphe suivant montrent que E_N décroît exponentiellement pour N grand.

L'utilisation de la loi normale (suggérée pour la première fois par Bowen [1943]) peut être critiquée en raison de la possibilité

d'évaluations non bornées.

C'est pourquoi nous avons aussi traité le cas de la loi uniforme. Supposant que les évaluations individuelles sont des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur $[-1, +1]$, nous avons:

$$E_N = 2N \int_{x=-1}^{x=0} \int_{Z=-x}^{Z=1} x^{\frac{1}{2}} dZ f(dx)$$

où $f(.)$ est la densité de x , somme des évaluations de $N-1$ agents.

D'après Stephens [1966]

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{N}{2(N-2)!} \int_{x=-1}^{x=0} \left(\int_{Z=-x}^{Z=1} dz \right) \sum_{j=0}^{[(x+N-1)/2]} x(-1)^j C_{N-1}^j \left(\frac{x+N-1}{2} - j \right)^{N-2} dx \\ &= \frac{N}{2(N-2)!} \int_{x=-1}^{x=0} \sum_{j=0}^{[(x+N-1)/2]} x(1+x)(-1)^j C_{N-1}^j \left(\frac{x+N-1}{2} - j \right)^{N-2} dz \end{aligned}$$

$$\text{où } \left[\frac{x+N-1}{2} \right] = \frac{N}{2} - 1 \quad \text{si } N \text{ est pair}$$

$$= \frac{N-1}{2} - 1 \quad \text{si } N \text{ est impair.}$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, on peut échanger les signes $\int$ et $\sum$ et on obtient

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{1}{2^{N-1}(N-1)!} \sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{2} \right]} (-1)^j C_{N-1}^j [(N-1-2j)^N + (N-2-2j)^N \\ &\quad + \frac{2}{N+1} [(N-2-2j)^{N+1} - (N-1-2j)^{N+1}]] \end{aligned}$$

avec $\overline{N} = \frac{N}{2} - 1$ si N est pair

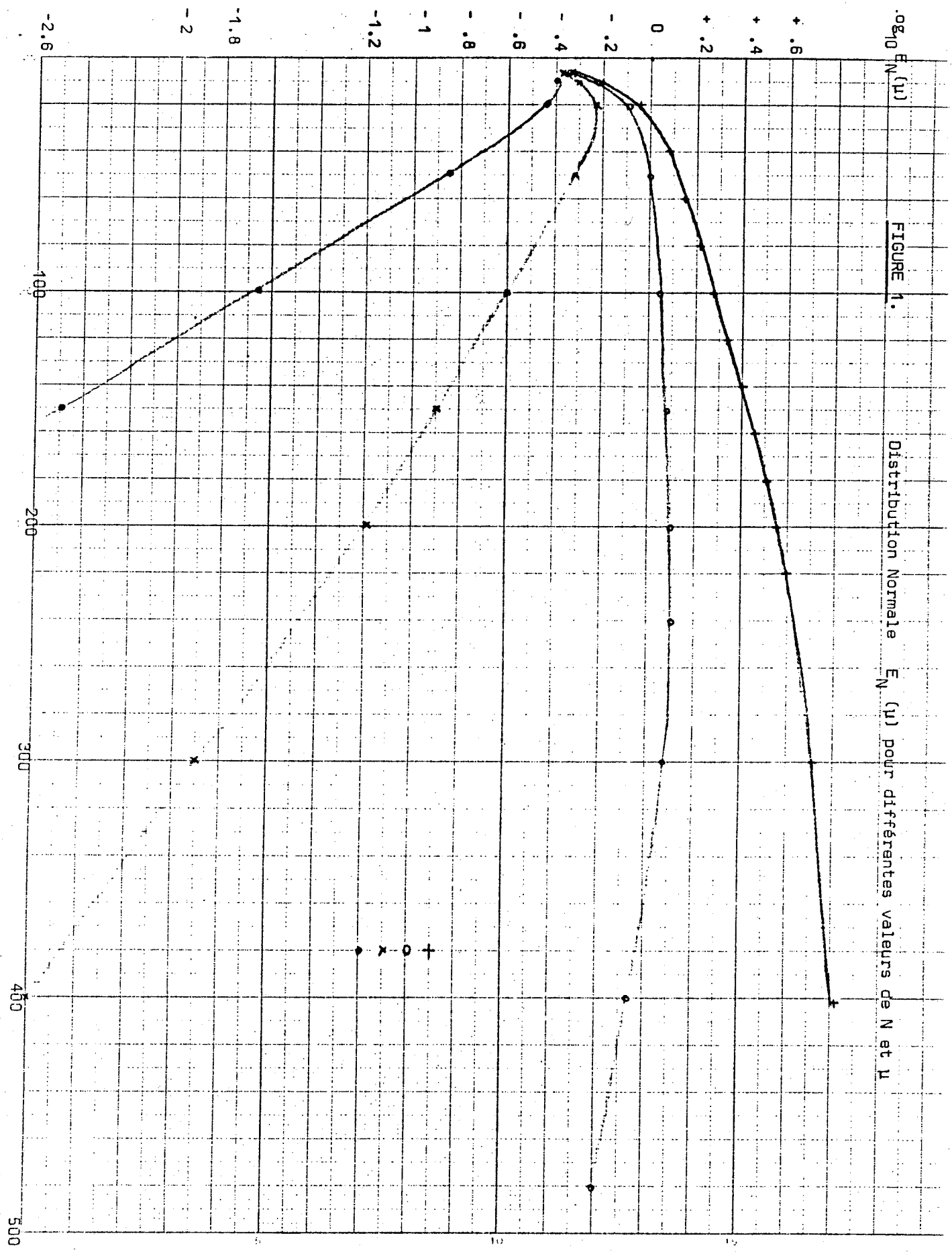
$= \frac{N-1}{2}$ si N est impair.

Les expressions obtenues ci-dessus dans le cas de la loi normale et de la loi uniforme ont été évaluées numériquement. Sur la figure 1 (cas normal), on voit que $E_N(.)$ converge en tout point lorsque $\mu \rightarrow 0$, et que $E_N(\mu)$ atteint un maximum puis décroît rapidement lorsque $N \rightarrow \infty$ (voir aussi table 1). Les résultats pour le cas uniforme (moyenne nulle) sont représentés sur la figure 2 et sur la figure 3 pour la distribution uniforme sur $[-1,2]$.

. Dans l'appendice 2, nous donnons une démonstration générale de la convergence vers $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ de $\frac{E_N}{\sqrt{N}}$ quand $\mu = 0$ et de la convergence vers 0 de $N^\alpha E_N$ pour tout α quand $\mu \neq 0$.

FIGURE 1.

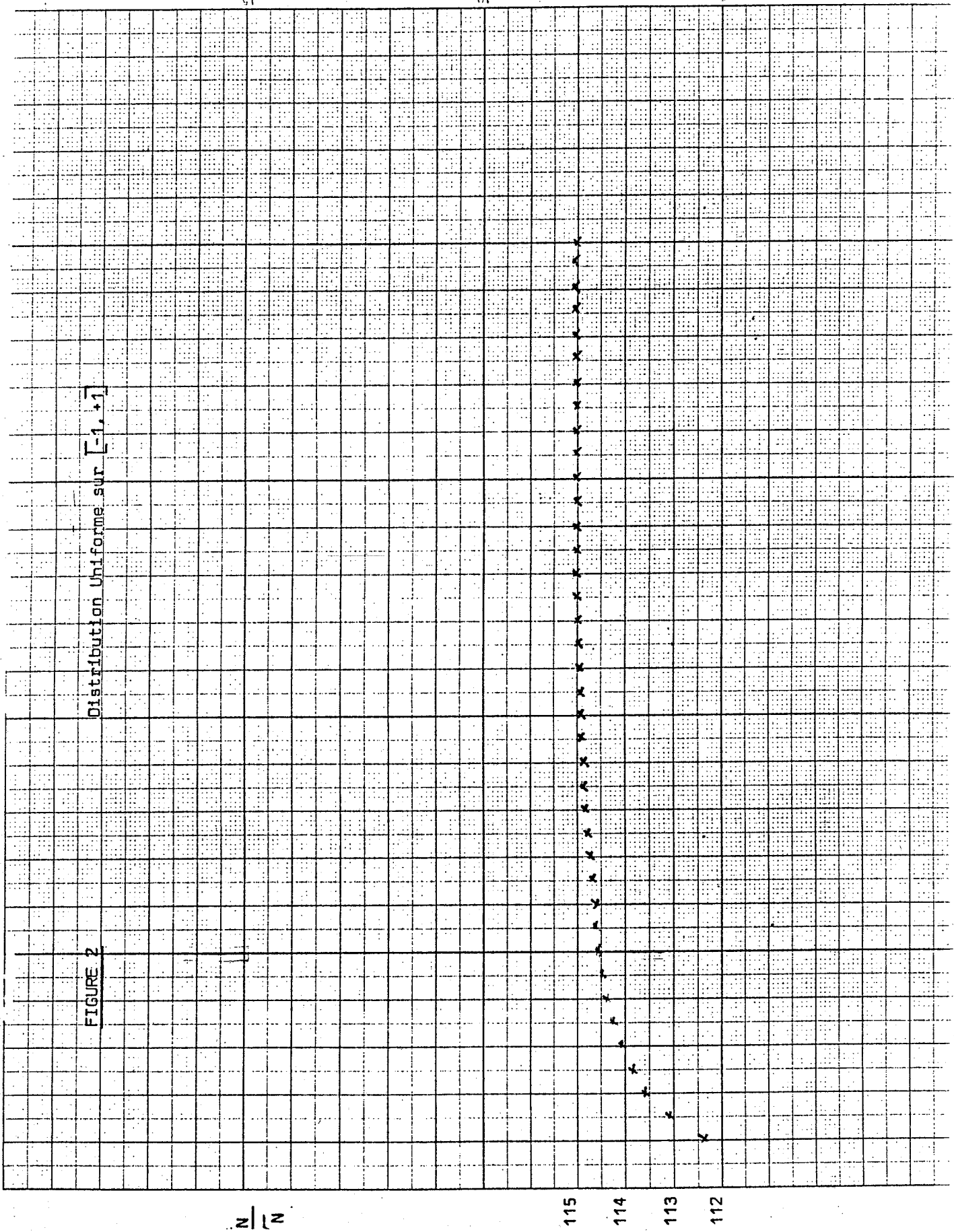
Distribution Normale $E_N(y)$ pour différentes valeurs de N et μ

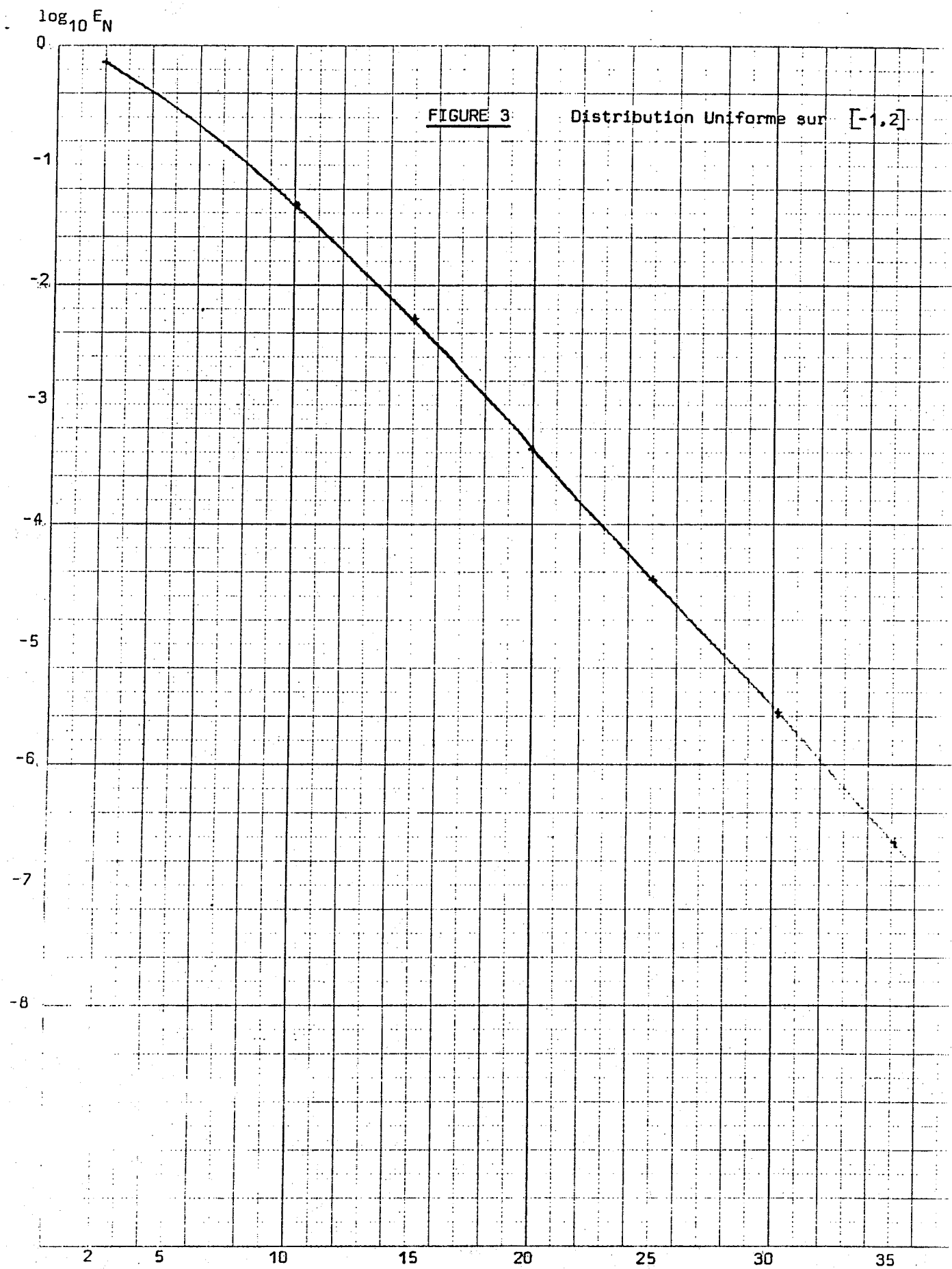


Distribution
Normale

$\frac{N}{\mu}$	10	20	50	100	200	500	1000
0	.61	.89	$.13 \cdot 10^1$	$.18 \cdot 10^1$	$.36 \cdot 10^1$	$.75 \cdot 10^1$	$.87 \cdot 10^1$
.5	.18	$.77 \cdot 10^{-1}$	$.27 \cdot 10^{-2}$	$.75 \cdot 10^{-5}$	$.53 \cdot 10^{-10}$	$.57 \cdot 10^{-26}$	$.48 \cdot 10^{-53}$
1	$.53 \cdot 10^{-2}$	$.52 \cdot 10^{-4}$	$.24 \cdot 10^{-10}$	$.48 \cdot 10^{-21}$	$.17 \cdot 10^{-42}$	$.25 \cdot 10^{-107}$	$.82 \cdot 10^{-216}$
1.5	$.14 \cdot 10^{-4}$	$.27 \cdot 10^{-9}$	$.94 \cdot 10^{-24}$	$.52 \cdot 10^{-48}$	$.12 \cdot 10^{-96}$	$.65 \cdot 10^{-243}$	0.
2	$.41 \cdot 10^{-8}$	$.10 \cdot 10^{-16}$	$.16 \cdot 10^{-42}$	$.95 \cdot 10^{-86}$	$.22 \cdot 10^{-172}$	0.	0.

TABLE 1





3. Mécanisme presque satisfaisant avec un budget de l'Etat équilibré

Le résultat précédent est intéressant et peut justifier l'approche d'équilibre partiel utilisée si l'on est prêt à considérer que la taxe par tête est si petite en général que les agents n'en tiennent pas compte. On peut ne pas être complètement satisfait par un tel résultat dans la mesure notamment où la force de l'incitation décroît avec la taille de l'économie.

Aussi, la question suivante surgit-elle : supposons que l'on redistribue les taxes perçues par le mécanisme et que les agents aient conscience de cette redistribution. Est-ce que les agents ont encore intérêt à dire la vérité ?

Pour répondre à cette question, il faut préciser la redistribution envisagée, ici une redistribution égale, ainsi que les anticipations des agents concernant les disponibilités à payer des autres agents. Ici nous supposons que chaque agent croit que les évaluations des autres sont issues indépendamment d'une population dont la fonction de répartition est $F(\cdot)$. Le résultat de cette section est que, dans ce cadre, la réponse optimale de l'agent approche la vérité lorsque l'économie croît. Par conséquent, le résultat d'un mécanisme à pivot modifié pour assurer une compatibilité d'équilibre général est asymptotiquement f.i.r.

Est-ce que ce mécanisme asymptotiquement f.i.r. est aussi asymptotiquement heureux ? C'est le dernier point discuté dans cette section.

Théorème 10 : Si la fonction de répartition $F(\cdot)$ est absolument continue et la densité $f(\cdot)$ est à mode unique (zéro) et symétrique autour de zéro, et si $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} f_N(x)$ converge uniformément vers une constante,

la réponse de l'agent converge vers la vérité lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini.

Démonstration : Exprimons tout d'abord l'espérance mathématique de l'utilité d'un agent qui donne une réponse w (≥ 0 sans perte de généralité). Il y a N agents et x dénote la somme des $N-1$ autres.

L'utilité espérée du projet lui-même est :

$$(1) \int_{-w}^{\infty} v \, dF_{N-1}(x)$$

La taxe qui lui est imposée est :

$$(2) \int_{-w}^0 x \, dF_{N-1}(x) \quad \begin{array}{l} \text{car pour } w > 0 \text{ l'agent est un pivot} \\ \text{si et seulement si } -w < x < 0 \end{array}$$

Cependant, d'après le processus de redistribution des taxes choisi $\frac{1}{N}$ ème de sa propre taxe lui est reversé de sorte que sa taxe nette est :

$$(3) \frac{N-1}{N} \int_{-w}^0 x \, dF_{N-1}(x)$$

Enfin, il lui est reversé $\frac{1}{N}$ des taxes de tous les autres agents.

Considérons un agent pivot typique différent de l'agent étudié ;
 x désigne maintenant la somme des réponses des $N-2$ autres agents.
 La taxe espérée pour cet agent est alors :

$$(4) \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x) dF(Z) - \int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x) dF(Z)$$

le premier terme correspondant au cas où l'agent pivot fait réaliser
 le projet et le deuxième terme au cas où l'agent fait échouer le projet.

L'espérance de gain de l'agent étudié est alors :

$$(5) \frac{(N-1)}{N} \left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x) dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x) dF(Z) \right]$$

L'espérance de gain total est, pour une réponse $w \geq 0$:

$$(6) \int_{-w}^{\infty} v dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \int_{-w}^0 x dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \cdot$$

$$\left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x) dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x) dF(Z) \right]$$

Nous savons que la fonction (1) + (2), qui correspond au mécanisme originel, est maximée pour $w = v$ par la propriété de stratégie dominante unique.

Le terme supplémentaire $-\frac{1}{N} \int_{-w}^0 x dF_{N-1}(x)$, qui correspond à la diminution de sa propre taxe, est symétrique autour de zéro où il réalise son minimum et est monotone de part et d'autre de zéro. Par conséquent, le maximum de (1) + (3) est atteint en un point v^* qui a le même signe que v et est plus grand en valeur absolue. De fait,

$$v^* = \frac{N}{N-1} v \quad \text{c'est-à-dire } v^* \text{ est borné } \sqrt{N}.$$

Considérons maintenant (5). Posons les changements de variables suivants :

$u = x+w$ dans la première intégrale et

$v = -x-w$ dans la deuxième intégrale.

Nous obtenons :

$$\frac{(N-1)}{N} \int_0^\infty f_{N-2}(u-w) u F(-u) du + \int_0^\infty f_{N-2}(-v-w) v [1 - F(v)] dv$$

Puisque $f(\cdot)$ et $f_{N-2}(\cdot)$ sont symétriques autour de zéro

$$F(-u) = 1 - F(u)$$

$$f_{N-2}(-v-w) = f_{N-2}(v+w)$$

D'où :

$$\frac{N-1}{N} \left[\int_0^\infty f_{N-2}(u-w) u [1 - F(u)] du + \int_0^\infty f_{N-2}(v+w) v [1 - F(v)] dv \right]$$

Il est clair dès lors que cette fonction de w est symétrique autour de zéro.

Si le mode est unique et en zéro, cette fonction est décroissante sur sa branche positive et croissante sur sa branche négative ; elle prend son maximum en zéro, de sorte que le maximum de (1) + (3) + (4) appartient à l'intérieur de l'intervalle $[0, v^*]$ et est donc caractérisé par un zéro de la dérivée de (1) + (3) + (4).

Considérons maintenant cette dérivée égale, après quelques manipulations, à :

$$(7) \quad v f_{N-1}(-w) - \frac{N-1}{N} w \cdot f_{N-1}(-w) + \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(Z) \\ - \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) - \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f(-w-x) dF_{N-2}(x) = 0$$

Considérons tout d'abord le dernier terme de (7) :

$$- \frac{(N-1)}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f(-w-x) dF_{N-2}(x) = \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f_{N-2}(x) dF(-w-x)$$

Nous sommes intéressés à calculer :

$$(8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \cdot \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f_{N-2}(x) dF(-w-x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} g_N(w) = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) \sqrt{N} f_{N-2}(x) dF(-w-x)$$

Puisque $\sqrt{N} f_{N-2}(x)$ converge uniformément vers une constante pour N assez grand $\sqrt{N} f_{N-2}(x)$ est borné uniformément supérieurement et inférieurement par des constantes.

$$\text{D'autre part : } \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) dF(-w-x) = 0$$

de sorte que la suite de fonctions $(w+x) \sqrt{N} f_{N-2}(x) f(-w-x)$ est majorée par une fonction intégrable et nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} g_N(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} f_{N-2}(x) \right] dF(-w-x) \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) dF(-w-x) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sqrt{N} g_N(w)$ converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $[0, v^*]$ quand N tend vers l'infini.

Considérons les termes 3 et 4 de (7) que l'on réécrit :

$$\begin{aligned} h_N(w) &= \frac{N-1}{N} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \right] \\ h'_N(w) &= \frac{N-1}{N} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(-w-x) f_{N-2}(x) dx - f_{N-2}(-w) \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w) \right] dF(-w-x) \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{N} [f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]$ est uniformément borné, on peut de nouveau appliquer le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} h'_N(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} [f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)] dF(-w-x) = 0$$

Puisque $\sqrt{N} h'_N(w)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, v^*]$, et que $\sqrt{N} h_N(0) = 0$, $\sqrt{N} h_N(w)$ converge uniformément vers zéro sur $[0, v^*]$.

(7) peut être réécrit comme :

$$(9) \quad \left[v - \frac{N-1}{N} w \right] f_{N-1}(-w) + h_N(w) + g_N(w) = 0$$

Multipliant par $\sqrt{N}$:

$$\left[v - \frac{N-1}{N} w \right] \sqrt{N} f_{N-1}(-w) + \sqrt{N} h_N(w) + \sqrt{N} g_N(w) = 0$$

Nous obtenons d'après les résultats ci-dessus que w tend vers la vérité v .

Q-E-D

Notons que les hypothèses du théorème sont en particulier vérifiées par la loi normale de moyenne zéro et de variance quelconque.

Ceci montre que le mécanisme est asymptotiquement f.i.r. Ceci ne suffit pas à montrer qu'il est asymptotiquement heureux.

Utilisant :

$$| \sum w_i - \sum v_i | \leq \sum |w_i - v_i|$$

on peut montrer par une démonstration analogue à celle du théorème précédent que $\sum |w_i - v_i|$ est arbitrairement petit si, en plus des hypothèses du théorème, $\lim_{N \rightarrow \infty} N \sqrt{N} \cdot f_N(x)$ converge uniformément vers une constante.

Cette hypothèse toutefois ne peut pas être vérifiée si x est une somme de N variables aléatoires indépendantes de distribution fixée. Par contre elle serait possible si les anticipations d'un agent au sujet des autres agents dépendaient du nombre d'agents (exemple : loi uniforme sur $[-\sqrt{N}, +\sqrt{N}]$) ou si ces anticipations étaient corrélées de sorte que, par exemple $f_N(x)$ soit uniforme sur $[-N\sqrt{N}, N\sqrt{N}]$.

Sans aller jusqu'à ces hypothèses particulières, on peut observer qu'une grande partie des biais individuels se simplifieront. Une discussion de ce point sera introduite dans une version ultérieure de cette note.

5. Conclusion

Nous avons montré que, dans une économie où les fonctions d'utilité sont séparables, il est possible de mettre en oeuvre des mécanismes qui apportent une solution satisfaisante au "problème du passager clandestin". Il ne faudrait pas croire toutefois que toutes les difficultés ont été surmontées. Nous mentionnons ici trois problèmes importants:

Tout d'abord les solutions proposées sont individuellement rationnelles, mais rien n'a été dit sur les possibilités de manipulation par des coalitions.

Il est fréquent que les agents ne soient pas bien informés ex ante de leurs préférences et doivent se procurer une information coûteuse pour être en mesure de fournir des réponses proches de la vérité. Si dès lors, la force de l'incitation est trop faible, ils ne font pas cet effort et leurs réponses perdent tout lien avec la réalité. Or, dans les mécanismes considérés, la force de l'incitation liée à la probabilité d'être pivot décroît avec le nombre d'agents.

Une façon d'atténuer ces difficultés est d'introduire une version "sondage" des mécanismes de Groves, idée que nous avons développée dans Green et Laffont [1974b] [1975b] [1975c] . En interrogeant seulement un échantillon tiré au hasard, d'une part on minimise les possibilités de communication entre les agents et d'autre part, on accroît la force de l'incitation puisque on diminue le nombre d'agents concernés. Par contre, on introduit une erreur d'échantillonnage qui

conduit à des question de taille optimale de l'échantillon. Lorsqu'on interroge seulement un échantillon il est possible de taxer le complémentaire de l'échantillon du montant nécessaire pour financer le mécanisme, sans détruire la rationalité individuelle. On peut aussi choisir des mécanismes qui ont de bonnes propriétés quant à l'incitation des agents à participer à l'échantillon. Cette approche sondage sera exposée dans une prochaine note.

Références

- Arrow, K.J. [1951], Social Choice and Individual Values, J.Wiley and Sons, New-York.
- Black, D. [1948], "On the Rationale of Group Decision-making", Journal of Political Economy, 56, 23-24.
- Bowen, H. [1943], "The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources", Quarterly Journal of Economics, 58, 27-48.
- Clarke, E.H. [1971], "Multipart Pricing of Public Goods", Public Choice, 19-33.
- Drèze, J. and D. de la Vallée Poussin [1971], "A Tâtonnement Process for Public Goods", Review of Economic Studies, 38, 133-150.
- Gibbard, A. [1973], "Manipulation of Voting Schemes. A General Result", Econometrica, 41, 587-601.
- Green, J. and J.J. Laffont [1974a], "Characterization of Individually Incentive Compatible Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods", Technical Report No. 141, Stanford University
- Green, J. and J.J. Laffont [1974b], "On the Revelation of Preferences for Public Goods", Technical Report No. 140, Stanford University, à paraître dans Journal of Public Economics.
- Green, J. and J.J. Laffont [1975a], "Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods", à paraître dans Econometrica.
- Green, J. and J.J. Laffont [1975b], "Strength of Incentives for S.I.I.C. Mechanisms", Harvard Institute of Economic Research, DP. No. 411.
- Green, J. and J.J. Laffont [1975c], "A Bayesian Approach to the Free Rider Problem", mimeo, presented to the 11th NSF-NBER Conference on Bayesian Econometrics, Rochester.
- Groves, T. [1973], "Incentives in Teams", Econometrica, 41, 617-631.
- Groves, T. [1974], "Information, Incentives, and the Internalization of Production Externalities", D.P. No. 87, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.
- Groves, T. and J. Ledyard [1975], "An Incentive Mechanism for Efficient Resource Allocation in General Equilibrium with Public Goods", D.P. no. 119, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

- Groves, T. and M. Loeb [1975], "Incentives and Public Inputs", Journal of Public Economics, 4, 211-226.
- Hurwicz, L. [1972], "On Informationally Decentralized Systems", in R. Radner and C.B. McGuire, eds, Decision and Organization, North Holland, Amsterdam.
- Hurwicz, L. [1975], "Nash Equilibrium and Pareto Optimality for Public and Private Goods", presented at the NSF-NBER Conference on Decentralization, Princeton University.
- Kurz, M. [1974], "Experimental Approach to the Determination of the Demand for Public Goods", Journal of Public Economics, 3, 329-348.
- Ledyard, J. and D.J. Roberts [1974], "On the Incentive Problem with Public Goods", D.P. no. 116, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.
- Lindhal, E. [1919], Die Gerechtigkeit der Besteuerung, Lund. Traduction anglaise dans Musgrave and Peacock [1958].
- Malinvaud, E. [1970], Leçons de Théorie Microéconomique, Dunod, Paris.
- Malinvaud, E. [1972], "Prices for Individual Consumption, Quantity Indicators for Collective Consumption", Review of Economic Studies, 39, 385-405.
- Musgrave, R. [1959], The Theory of Public Finance, Mc Graw Hill, New York.
- Musgrave, R. and A.T. Peacock, eds, [1958], Classics in the Theory of Public Finance, MacMillan, London.
- Newberry, J. [1974], "Experimental Approach to the Determination of the Demand for Public Goods; a Comment", Journal of Public Economics, 3, 425-429.
- Samuelson, P. [1954], "The Pure Theory of Public Expenditures", Review of Economics and Statistics, 36, 387-389.
- Samuelson, P. [1955], "Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditures", Review of Economics and Statistics, 37, 350-356.
- Samuelson, P. [1969], "Pure Theory of Public Expenditure and Taxation", in Public Economics, Margolis, J. and H. Guitton, (eds) Macmillan-St Martin Press, New-York, 98-123.
- Satterthwaite, M.A. [1975], "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions", Journal of Economic Theory, 10, 187-217.

- Savage, L.J. [1971], "Elicitation of Personal Probabilities and Expectations", Journal of the American Statistical Association, 66, 783-801.
- Stephens, M.A. [1966], "Statistics Connected with the Uniform Distribution: Percentage Points and Application to Testing for Randomness of Directions", Biometrika, 53, 235-240.
- Stiglitz, J. [1974], "The Theory of Local Public Goods", Technical Report no. 144, Stanford University.
- Thompson, E.A. [1967], "A Pareto Optimal Group Decision Process", Papers on Non-Market Decision Making, University of Virginia.
- Tiebout, C.M. [1956], "A Pure Theory of Local Expenditures", Journal of Political Economy, 64, 416-424.
- Vickrey, W. [1961], "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders", Journal of Finance, 16,
- Wicksell, K. [1896], Finanztheoretische Untersuchungen and das Steuerwesen Schweden's, Jena, Germany, Traduction anglaise dans Musgrave and Peacock [1958].

A P P E N D I C E 1

W. VICKREY (1961) a proposé, dans le cas des biens privés, un mécanisme destiné à éviter la spéculation qui est l'analogue d'un mécanisme de Groves. L'agrégation des fonctions de demande conduit à un prix d'équilibre p qui, pour chaque agent, définit, avec sa propre fonction de demande, la quantité qu'il reçoit. Cependant, le prix effectif payé par l'agent i est défini à partir de la fonction de demande obtenue en agrégeant les demandes des autres agents et de la fonction d'offre. Une agence paie le complément. Ce schéma, qui évite un comportement spéculatif, a l'inconvénient de conduire à un prix moyen inférieur au prix d'équilibre concurrentiel ; cette différence est l'analogue des transferts que nous avons définis pour les biens publics et doit être financée par l'extérieur.

Pour le cas d'un bien unique, il propose un mécanisme d'enchères qui correspond au mécanisme à pivot dans lequel chaque agent peut faire une seule enchère, et le bien est attribué à l'agent qui fait la plus haute enchère, mais à un prix égal à la deuxième enchère. Le montant qu'il doit payer correspond bien au coût qu'il impose au reste de la société, tout comme $\Sigma_{w_{-i}}$ est le coût imposé au reste de la société si dans le mécanisme à pivot la réponse de l'agent fait changer la décision.

E. H. CLARKE (1971) a proposé dans un article peu connu le mécanisme à pivot pour un projet public de taille variable. Il a interprété son mécanisme comme un tarif à deux composantes, un coût $p_i K_i^*$, où le prix p_i est déterminé ex ante, et un coût variable qui correspond au transfert nécessaire pour le mécanisme de révélation,

A P P E N D I C E 2

Théorème 11 : Si la fonction de répartition $F (.)$ est absolument continue, si la variance de $F (.)$ est bornée et normalisée à un

- et si, de plus, la densité $f (.)$ est à mode unique égal à zéro

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \quad \text{quand } \mu = 0$$

- et si, de plus, $\forall \alpha, N^\alpha f_N (x)$ converge uniformément vers zéro quand N tend vers l'infini pour $\mu \neq 0$

$$\forall \alpha, \lim_{N \rightarrow \infty} N^\alpha E_N = 0 \quad \text{quand } \mu \neq 0$$

Démonstration : Considérons tout d'abord le cas $\mu = 0$.

Nous voulons évaluer la limite quand N tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} E_N = \sqrt{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x/|x| < |v| \text{ et } xv < 0\}} |x| dF_{N-1}(x)$$

Soit $y = \frac{x}{\sqrt{N-1}}$ et $G_{N-1} (.)$ la fonction de répartition de y .

D'après le théorème de Lindeberg - Levy, $G_{N-1} (.)$ converge en tout point vers la fonction de répartition normale qui est absolument continue. Par conséquent, la densité $g_{N-1} (y)$ converge presque partout vers la densité de la loi normale. Remarquons que le maximum de $g_{N-1} (y)$ est toujours 0. Puisqu'au point 0, $g_{N-1} (y)$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la suite des fonctions $g_{N-1} (.)$ est uniformément bornée par une constante A .

Considérons maintenant le cas $\mu \neq 0$

$$N^{\alpha} E_N = N^{\alpha} \int_{-\infty}^0 f(v) dv \int_0^{-v} x f_{N-1}(x, \mu) dx - N^{\alpha} \int_0^{\infty} f(v) dv \cdot$$

$$\int_{-v}^0 x f_{N-1}(x, \mu) dx$$

D'après l'hypothèse (vérifiée pour la loi normale), une application du théorème de Lebesgue nous donne le résultat.

